CORE Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

УДК 532.59

ЗВ'ЯЗОК МІЖ СТОХАСТИЧНИМИ АМПЛІТУДАМИ ПОЛІВ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬ У РІДКІЙ СИСТЕМІ «ПІВПРОСТІР-ПІВПРОСТІР»

О.В. Авраменко

Виведено друге наближення основного динамічного рівняння для випадкових внутрішніх хвиль на поверхні контакту двох рідких півпросторів.

The second approximation of the main dynamic equation for random internal waves on the interface of two fluid half-spaces is obtained.

Вступ. При вивченні проблеми випадкових хвиль у гідродинамічному середовищі не можна не відмітити фундаментальну працю, де закладено основи статистичної гідромеханіки [1], достатньо повний сучасний огляд проблеми випадкових поверхневих хвиль у книзі [2], а також деякі статті по проблемі стохастичного поля поверхневих хвиль на воді або вітрових хвиль [6], [7], [9].

Аналогічні до вітрових хвиль є хвильові процеси, які спостерігаються у внутрішній частині океану, де існує різкий перепад густини рідкого середовища та відбуваються складні стохастичні рухи різних просторово-часових масштабів на фоні зсувних течій, тощо. Однією із особливостей внутрішнього хвильового руху на поверхні контакту різних за властивостями рідких середовищ є його нелінійний характер. У статтях [3], [8] методом багатомасштабних розвинень досліджено стійкість та особивості хвильового руху у двошарових системах вигляду "півпростір - півпростір", "шар - півпростір".

Внутрішні хвильові процеси в океані є складним гідродинамічним процесом, який має стохастичний характер. Назвемо деякі роботи, присвячені проблемі випадкових внутрішніх хвиль [4], [5], при цьому зазначимо, що особливості поширення та взаємодії випадкових хвиль у двошарових системах вивчена на даний час недостатньо.

У даній роботі розглядається нова слабко нелінійна задача про випадкові внутрішні хвильові рухи у гідродинамічній системі "півпростір - півпростір" з різними властивостями. Отримано систему рівнянь до другого порядку малого параметру відносно стохастичних амплітуд, а також виведено друге наближення основного динамічного рівняння названої системи.

1. Постановка задачі та метод розв'язання. В роботі досліджується поле випадкових хвиль на поверхні контакту $z=\eta(x,t)$ двох рідких півпросторів $\Omega_1=\{(x,y,z),-\infty<x,y<\infty,z<0)\}$ та $\Omega_2=\{(x,y,z),-\infty<x,y<\infty,\ z>0)\}$ з різними густинами ρ_1 та ρ_2. Сила тяжіння направлена перпендикулярно до поверхні розподілу у від'ємному z-напрямку.

Представимо математичну постановку задачі.

$$\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial z^2}=0 \quad \text{у} \quad \Omega_j,\ j=1,2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}=-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} \quad \text{при} \quad z=\eta(x,t),\ j=1,2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}-\rho\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+(1-\rho)\eta+\frac{1}{2}(\nabla\varphi_1)^2-\frac{1}{2}\rho(\nabla\varphi_2)^2=0 \quad \text{при} \quad z=\eta(x,t), \tag{3}$$

$$|\nabla\varphi_j|\to 0 \quad \text{при} \quad z\to\mp\infty, \tag{4}$$

де φ_j $(j=1,2)$ - потенціали швидкостей; $\rho=\rho_2/\rho_1$.

Введемо безрозмірні величини за допомогою характерної довжини L, що рівна товщині верхнього шару h_2, максимального відхилення вільної поверхні a, характерного часу $(L/g)^{1/2}$, густини нижньої рідини ρ_1, де g прискорення вільного падіння. Перейдемо до безрозмірних величин, які позначимо зірочкою,

$$(x,z)=L(x^*,z^*),\qquad t=\sqrt{\frac{L}{g}}t^*,\quad \rho_2=\rho_1\rho^*,\qquad (\eta,\eta_0)=a(\eta^*,\eta_0^*),.$$

$$\varphi=\frac{La}{\sqrt{L/g}}\varphi^*,\qquad (T,T_0)=L^2\rho_1 g(T^*,T_0^*). \tag{5}$$

Позначивши величину $\frac{a}{L}=\alpha$ (коефіцієнт нелінійності) та використавши формули (5) перепишемо систему (1)-(4) у безрозмірних змінних

$$\frac{\partial^2\varphi_j^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_j^*}{\partial z^2}=0 \quad \text{у} \quad \Omega_j,\ j=1,2, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\eta^*}{\partial t^*}-\frac{\partial\varphi_j^*}{\partial z^*}=-\alpha\frac{\partial\eta^*}{\partial x^*}\frac{\partial\varphi_j^*}{\partial x^*} \quad \text{при} \quad z^*=\alpha\eta^*(x,t), \qquad j=1,2, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial t^*}-\rho^*\frac{\partial\varphi_2^*}{\partial t^*}+(1-\rho^*)\eta^*+\frac{1}{2}\alpha(\nabla\varphi_1^*)^2-\frac{1}{2}\alpha\rho^*(\nabla\varphi_2^*)^2=0 \quad \text{при} \quad z^*=\alpha\eta^*(x,t), \tag{8}$$

$$|\nabla\varphi_j|\to 0 \quad \text{при} \quad z\to\mp\infty, \tag{9}$$

Розглянемо проблему (6)-(8) у масштабах простору та часу, які відповідають умовам квазіоднорідності та квазістаціонарності, та скористаємося розвиненнями всіх випадкових полів у інтеграли Фур'є-Стілт'єса

$$\eta(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}B_q\exp(i\chi)d\mathbf{q}\,, \tag{10}$$

$$\varphi_1(\mathbf{x},z,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}A_q^{(1)}\exp(i\chi+kz)d\mathbf{q}\,, \tag{11}$$

$$\varphi_2(\mathbf{x},z,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}A_q^{(2)}\exp(i\chi-kz)d\mathbf{q}\,, \tag{12}$$

де $\chi=\mathbf{kx}-\omega t$ - фазова змінна; $\mathbf{k}=(k_x,k_y)$ - горизонтальний хвильовий вектор; $k=|\mathbf{k}|$ - модуль хвильового вектора або хвильове число; $\mathbf{q}=(\mathbf{k},\omega)$ - узагальнена фазова змінна Фур'є розвинення, для диференціалу якої прийнято позначення $d\mathbf{q}=d\mathbf{k}\,d\omega$. Величини $A_q^{(1)}\equiv A^{(1)}(\mathbf{q})$, $A_q^{(2)}\equiv A^{(2)}(\mathbf{q})$ та $B_q\equiv B(\mathbf{q})$ - стохастичні амплітуди відповідних полів. З метою спрощення подальших записів у всіх інтегралах по нескінченному інтервалу інтегрування межі інтегрування будуть опущені, це стосується і багатократних інтегралів.

Зауважимо, що загальний вигляд стохастичних амплітуд $A_q^{(1)}$, $A_q^{(2)}$ задовольняє умові спадання їх градієнта на відповідній нескінченності.

2. Система рівнянь відносно стохастичних амплітуд до α^2. Підставивши формули (10)-(12) у кінематичні умови (7) та у динамічну крайову умову (8), отримаємо

$$\int(-i\omega)B_q\exp(i\chi)d\mathbf{q}-\alpha\iint\mathbf{k_1k_2}A_{q_1}^{(1)}B_{q_2}\exp[i(\chi_1+\chi_2)+\alpha k_1\eta]d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2=$$
$$=\int k_1A_{q_1}^{(1)}B_q\exp(i\chi+\alpha k_1\eta)d\mathbf{q}\,.$$

$$\int(-i\omega)B_q\exp(i\chi)d\mathbf{q}-\alpha\iint\mathbf{k_1k_2}A_{q_1}^{(2)}B_{q_2}\exp[i(\chi_1+\chi_2)-\alpha k_1\eta]d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2=$$
$$=-\int k_1A_{q_1}^{(2)}B_q\exp(i\chi-\alpha k_1\eta)d\mathbf{q}\,.$$

$$\begin{aligned}&\int(-i\omega)A_q^{(1)}\exp(i\chi+\alpha k\eta)d\mathbf{q}-\rho\int(-i\omega)A_q^{(2)}\exp(i\chi-\alpha k\eta)d\mathbf{q}+\\&+\tfrac{1}{2}\alpha\iint(-\mathbf{k_1k_2}+k_1k_2)A_{q_1}^{(1)}A_{q_2}^{(1)}\exp[i(\chi_1+\chi_2)+\alpha(k_1+k_2)\eta]d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2-\\&-\tfrac{1}{2}\alpha\iint(-\mathbf{k_1k_2}+k_1k_2)A_{q_1}^{(2)}A_{q_2}^{(2)}\exp[i(\chi_1+\chi_2)-\alpha(k_1+k_2)\eta]d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2=\\&\qquad=-(1-\rho)\int B_q\exp(i\chi)d\mathbf{q}\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Для виключення зі співвідношення (13) експонент вигляду $\exp(\pm\alpha k\eta)$ скористаємося розвиненням в околі незбуреної поверхні контакту

$$\exp(\pm\alpha k\eta)=1\pm\alpha k\int B_{q_1}\ \exp(i\chi_1)d\mathbf{q_1}+\frac{(\alpha k)^2}{2}\iint B_{q_1}\ B_{q_2}\ \exp i(\chi_1+\chi_2)d\mathbf{q_1}d\mathbf{q_2}\pm\ ... \tag{14}$$

Підстановка розвинення (13) у співвідношення (12) приводить до таких *кінематичних умов*

$$\begin{aligned}&\int(-i\omega_1)B_{q_1}\exp(i\chi_1)d\mathbf{q}_1-\alpha\iint\mathbf{k_1k_2}A^{(1)}_{q_1}B_{q_2}\exp i(\chi_1+\chi_2)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2-\\&-\alpha^2\iiint\mathbf{k_1k_2}k_1A^{(1)}_{q_1}B_{q_2}B_{q_3}\exp i(\chi_1+\chi_2+\chi_3)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2d\mathbf{q}_3+o(\alpha^2)=\\&\qquad=\int k_1A^{(1)}_{q_1}B_q\exp i\chi_1d\mathbf{q}_1+\alpha\iint k_1A^{(1)}_{q_1}B_{q_2}\ \exp i(\chi_1+\chi_2)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+\\&\qquad+\tfrac{1}{2}\alpha^2\iiint k_1{}^3A^{(1)}_{q_1}B_{q_2}\ B_{q_3}\ \exp i(\chi_1+\chi_2+\chi_3)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2d\mathbf{q}_3+o(\alpha^2)\end{aligned}. \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\int(-i\omega_1)B_{q_1}\exp(i\chi_1)d\mathbf{q}_1-\alpha\iint\mathbf{k_1k_2}A^{(2)}_{q_1}B_{q_2}\exp i(\chi_1+\chi_2)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+\\&+\alpha^2\iiint\mathbf{k_1k_2}k_1A^{(2)}_{q_1}B_{q_2}B_{q_3}\exp i(\chi_1+\chi_2+\chi_3)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2d\mathbf{q}_3+o(\alpha^2)=\\&\quad=-\int k_1A^{(2)}_{q_1}B_q\exp i\chi_1d\mathbf{q}_1+\alpha\iint k_1A^{(2)}_{q_1}B_{q_2}\ \exp i(\chi_1+\chi_2)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2-\\&\quad-\tfrac{1}{2}\alpha^2\iiint k_1{}^3A^{(2)}_{q_1}B_{q_2}\ B_{q_3}\ \exp i(\chi_1+\chi_2+\chi_3)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2d\mathbf{q}_3+o(\alpha^2)\end{aligned}. \tag{16}$$

динамічної умови

$$\begin{aligned}&\int(-i\omega_1)A^{(1)}_{q_1}\exp i\chi_1\,d\mathbf{q}+\alpha\iint(-i\omega_1)k_1A^{(1)}_{q_1}B_{q_2}\ \exp i(\chi_1+\chi_2)\,d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+\\&\qquad+\tfrac{1}{2}\alpha^2\iiint(-i\omega_1)k_1{}^2A^{(1)}_{q_1}B_{q_2}\ B_{q3}\ \exp i(\chi_1+\chi_2+\chi_3)\,d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2d\mathbf{q}_3+...\\&-\rho\Big[\int(-i\omega_1)A^{(2)}_{q_1}\exp i\chi_1\ d\mathbf{q}-\alpha\iint(-i\omega_1)k_1A^{(2)}_{q_1}B_{q_2}\ \exp i(\chi_1+\chi_2)\ d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+\\&\qquad+\tfrac{1}{2}\alpha^2\iiint(-i\omega_1)k_1{}^2A^{(2)}_{q_1}B_{q_2}\ B_{q3}\ \exp i(\chi_1+\chi_2+\chi_3)\,d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2d\mathbf{q}_3-...\Big]+\\&+\tfrac{1}{2}\alpha\Big[\iint(-\mathbf{k_1k_2}+k_1k_2)A_{q_1}{}^{(1)}A_{q_2}{}^{(1)}\exp i(\chi_1+\chi_2)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+\\&\qquad\qquad+\alpha\iiint(-\mathbf{k_1k_2}+k_1k_2)(k_1+k_2)A_{q_1}{}^{(1)}A_{q_2}{}^{(1)}B_{q_3}\exp i(\chi_1+\chi_2+\chi_3)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+...\Big]\\&-\tfrac{1}{2}\alpha\rho\Big[\iint(-\mathbf{k_1k_2}+k_1k_2)A_{q_1}{}^{(2)}A_{q_2}{}^{(2)}\exp i(\chi_1+\chi_2)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2-\\&\qquad\qquad-\alpha\iiint(-\mathbf{k_1k_2}+k_1k_2)(k_1+k_2)A_{q_1}{}^{(2)}A_{q_2}{}^{(2)}B_{q_3}\exp i(\chi_1+\chi_2+\chi_3)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+...\Big]=\\&\qquad\qquad\qquad=-(1-\rho)\int B_{q_1}\exp(i\chi_1)d\mathbf{q}_1\,.\end{aligned} \tag{17}$$

Після скалярного множення співвідношень (15)-(17) на функцію $\exp i\chi$ (з врахуванням ортогональності базисних функцій, а також зв'язку скалярного добутку та δ-функції Дірака $\int\exp(i\chi)\exp(-i\chi_1)d\mathbf{q}=C\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q_1})$, де C – довільна стала) отримуємо

$$\int(-i\omega_1)B_{q_1}\delta(q_1-q)d\mathbf{q}_1-\alpha\iint\mathbf{k_1k_2}A^{(1)}_{q_1}B_{q_2}\delta(q_1+q_2-q)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2-$$
$$-\alpha^2\iiint\mathbf{k_1k_2}k_1A^{(1)}_{q_1}B_{q_2}B_{q_3}\delta(q_1+q_2+q_3-q)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2d\mathbf{q}_3+o(\alpha^2)=$$
$$=\int k_1A^{(1)}_{q_1}B_q\delta(q_1-q)d\mathbf{q}_1+\alpha\iint k_1^2A^{(1)}_{q_1}B_{q_2}\delta(q_1+q_2-q)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+$$
$$+\tfrac{1}{2}\alpha^2\iiint k_1^3A^{(1)}_{q_1}B_{q_2}B_{q_3}\delta(q_1+q_2+q_3-q)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2d\mathbf{q}_3+o(\alpha^2). \qquad (18)$$

$$\int(-i\omega_1)B_{q_1}\delta(q_1-q)d\mathbf{q}_1-\alpha\iint\mathbf{k_1k_2}A^{(2)}_{q_1}B_{q_2}\delta(q_1+q_2-q)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+$$
$$+\alpha^2\iiint\mathbf{k_1k_2}k_1A^{(2)}_{q_1}B_{q_2}B_{q_3}\delta(q_1+q_2+q_3-q)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2d\mathbf{q}_3+o(\alpha^2)=$$
$$=-\int k_1A^{(2)}_{q_1}B_q\delta(q_1-q)d\mathbf{q}_1+\alpha\iint k_1^2A^{(2)}_{q_1}B_{q_2}\delta(q_1+q_2-q)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2-$$
$$-\tfrac{1}{2}\alpha^2\iiint k_1^3A^{(2)}_{q_1}B_{q_2}B_{q_3}\delta(q_1+q_2+q_3-q)d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2d\mathbf{q}_3+o(\alpha^2). \qquad (19)$$

$$-\int i\omega_1A^{(1)}_{q_1}\delta(\mathbf{q_1}-\mathbf{q})\,d\mathbf{q}_1-\alpha\iint i\omega_1k_1A^{(1)}_{q_1}B_{q_2}\,\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q}_2-\mathbf{q})\,d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2-$$
$$-\tfrac{1}{2}\alpha^2\iiint i\omega_1k_1^2A^{(1)}_{q_1}B_{q_2}B_{q3}\,\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3-\mathbf{q})\,d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2d\mathbf{q}_3-o(\alpha^2)+$$
$$+\rho\Big[\int i\omega_1A^{(2)}_{q_1}\delta(\mathbf{q_1}-\mathbf{q})\,d\mathbf{q}-\alpha\iint i\omega_1k_1A^{(2)}_{q_1}B_{q_2}\,\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q}_2-\mathbf{q})\,d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+$$
$$+\tfrac{1}{2}\alpha^2\iiint i\omega_1k_1^2A^{(2)}_{q_1}B_{q_2}B_{q3}\,\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3-\mathbf{q})\,d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2d\mathbf{q}_3-o(\alpha^2)\Big]+ \qquad (20)$$
$$+\tfrac{1}{2}\alpha\Big[\iint(-\mathbf{k_1k_2}+k_1k_2)A_{q_1}^{(1)}A_{q_2}^{(1)}\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q}_2-\mathbf{q})d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+$$
$$+\alpha\iiint(-\mathbf{k_1k_2}+k_1k_2)(k_1+k_2)A_{q_1}^{(1)}A_{q_2}^{(1)}B_{q_3}\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3-\mathbf{q})d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+o(\alpha^2)\Big]+$$
$$-\tfrac{1}{2}\alpha\rho\Big[\iint(-\mathbf{k_1k_2}+k_1k_2)A_{q_1}^{(2)}A_{q_2}^{(2)}\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q}_2-\mathbf{q})d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2-$$
$$-\alpha\iiint(-\mathbf{k_1k_2}+k_1k_2)(k_1+k_2)A_{q_1}^{(2)}A_{q_2}^{(2)}B_{q_3}\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3-\mathbf{q})d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+o(\alpha^2)\Big]=$$
$$=-(1-\rho)\int B_{q_1}\exp(i\chi_1)d\mathbf{q}_1.$$

Врахування властивостей δ-функції при спрощенні (18)-(20) та проведення громіздких перетворень приводить до співвідношень

$$kA^{(1)}_q+i\omega B_q=-\tfrac{1}{2}\alpha\int\mathbf{k_1}(\mathbf{k}-\mathbf{k_2})A^{(1)}_{q_1}B_{q-q_1}d\mathbf{q}_1-\tfrac{1}{2}\alpha\int\mathbf{k_1}(\mathbf{k}-\mathbf{k_2})A^{(1)}_{q-q_1}B_{q_1}d\mathbf{q}_1-$$
$$-\tfrac{1}{2}\alpha\int k_1^2A^{(1)}_{q_1}B_{q-q_1}d\mathbf{q}_1-\tfrac{1}{2}\alpha\int|\mathbf{k}-\mathbf{k_1}|^2A^{(1)}_{q-q_1}B_{q_1}d\mathbf{q}_1- \qquad (21)$$
$$-\tfrac{1}{3}\alpha^2\iint(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{k_2}\,|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2|\,A^{(1)}_{q-q_1-q_2}B_{q_1}B_{q_2}d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2-$$
$$-\tfrac{1}{3}\alpha^2\iint\mathbf{k}_1(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)k_1A^{(1)}_{q_1}B_{q-q_1-q_2}B_{q_2}d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2-\tfrac{1}{3}\alpha^2\iint\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2k_1A^{(1)}_{q_1}B_{q-q_1-q_2}B_{q_2}d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2-$$
$$-\tfrac{1}{3}\alpha^2\iint k_1^3A^{(1)}_{q_1}B_{q-q_1-q_2}B_{q_2}d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2-\tfrac{1}{6}\alpha^2\iint|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2|^3A^{(1)}_{q-q_1-q_2}B_{q_1}B_{q_2}d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+o(\alpha^2)$$

$$-kA^{(2)}_q+i\omega B_q=-\tfrac{1}{2}\alpha\int\mathbf{k_1}(\mathbf{k}-\mathbf{k_2})A^{(2)}_{q_1}B_{q-q_1}d\mathbf{q}_1-\tfrac{1}{2}\alpha\int\mathbf{k_1}(\mathbf{k}-\mathbf{k_2})A^{(2)}_{q-q_1}B_{q_1}d\mathbf{q}_1-$$
$$-\tfrac{1}{2}\alpha\int k_1^2A^{(2)}_{q_1}B_{q-q_1}d\mathbf{q}_1-\tfrac{1}{2}\alpha\int|\mathbf{k}-\mathbf{k_1}|^2A^{(2)}_{q-q_1}B_{q_1}d\mathbf{q}_1+ \qquad (22)$$

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{1}{3}\alpha^2\iint(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{k}_2\,|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2|\,A^{(2)}_{q-q_1-q_2}B_{q_1}B_{q_2}d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+\\
&+\tfrac{1}{3}\alpha^2\iint\mathbf{k}_1(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)k_1A^{(2)}_{q_1}B_{q-q_1-q_2}B_{q_2}d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+\tfrac{1}{3}\alpha^2\iint\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2k_1A^{(2)}_{q_1}B_{q-q_1-q_2}B_{q_2}d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+\\
&+\tfrac{1}{3}\alpha^2\iint k_1^{\,3}A^{(2)}_{q_1}B_{q-q_1-q_2}B_{q_2}d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+\tfrac{1}{6}\alpha^2\iint|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2|^3A^{(2)}_{q-q_1-q_2}B_{q_1}B_{q_2}d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+o(\alpha^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-i\omega\left(A^{(1)}_q-\rho A^{(2)}_q\right)+(1-\rho)B_q=\\
&=-\tfrac{1}{2}\alpha\int i\omega_1k_1\left(A^{(1)}_{q_1}-\rho A^{(2)}_{q_1}\right)B_{q-q_1}d\mathbf{q}_1-\tfrac{1}{2}\alpha\int i(\omega-\omega_1)\,|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|\left(A^{(1)}_{q-q_1}-\rho A^{(2)}_{q-q_1}\right)B_{q_1}d\mathbf{q}_1+\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\alpha\int\left[-\mathbf{k}_1(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)+k_1|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|\right]\left(A^{(1)}_{q_1}A^{(1)}_{q-q_1}-\rho A^{(2)}_{q_1}A^{(2)}_{q-q_1}\right)d\mathbf{q}_1+\\
&\quad-\tfrac{2}{6}\alpha^2\iint i\omega_1k_1^2\left(A^{(1)}_{q_1}+\rho A^{(2)}_{q_1}\right)B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2- \qquad (23)\\
&-\tfrac{1}{6}\alpha^2\iint i(\omega-\omega_1-\omega_2)\,|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2|^2\left(A^{(1)}_{q-q_1-q_2}+\rho A^{(2)}_{q-q_1-q_2}\right)B_{q_1}B_{q_2}d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+\\
&\quad+\tfrac{1}{6}\alpha^2\iint(-\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2+k_1k_2)(k_1+k_2)\left(A^{(1)}_{q_1}A^{(1)}_{q_2}+\rho A^{(2)}_{q_1}A^{(2)}_{q_2}\right)B_{q-q_1-q_2}d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+\\
&+\tfrac{1}{3}\alpha^2\iint\left[-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{k}_1+|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2|\,k_1\right](|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2|+k_1)\left(A^{(1)}_{q-q_1-q_2}A^{(1)}_{q_1}+\rho A^{(2)}_{q-q_1-q_2}A^{(2)}_{q_1}\right)B_{q_2}d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2+\\
&\qquad+o(\alpha^2)
\end{aligned}
$$

В отриманій системі (21)-(23) відносно невідомих стохастичних амплітуд $A^{(1)}_q, A^{(2)}_q, B_q$ утримано доданки до α^2.

3. Друге наближення динамічного рівняння для стохастичних внутрішніх слабко нелінійних хвиль. Для отримання динамічного рівняння для стохастичних внутрішніх слабко нелінійних хвиль застосуємо до системи (21)-(23) метод послідовних наближень. Із лінійного наближення кінематичних умов (21) та (22) маємо

$$
{}^{[1]}A^{(1)}_q=-\frac{i\omega}{k}B_q,\quad {}^{[1]}A^{(2)}_q=\frac{i\omega}{k}B_q.
$$

Друге наближення отримується підстановкою першого наближення у співвідношення (21) та (22), де враховано члени до α

$$
{}^{[2]}A^{(1)}_q={}^{[2]}A^{(2)}_q=-\frac{i}{2}\int\left\{\left[k_1^{\,2}+\mathbf{k}_1(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\right]\frac{\omega_1}{kk_1}+\left[|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1{}^{2}|+\mathbf{k}_1(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\right]\frac{\omega-\omega_1}{k\,|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|}\right\}B_{q_1}B_{q-q_1}d\mathbf{q}_1 .
$$

Підстановка повних виразів амплітуд

$$
A^{(i)}_q={}^{[1]}A^{(i)}_q+\alpha\,{}^{[2]}A^{(i)}_q+\ldots\quad(i=1,2)
$$

у динамічну крайову умову (23) приводить до основного динамічного рівняння до першого степеня малого параметру α

$$
\left((1-\rho)-\frac{\omega^2}{k}(1+\rho)\right)B_q=\alpha\int f(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)B_{q_1}B_{q-q_1}d\mathbf{q}_1+o(\alpha), \qquad (24)
$$

тут вираз $f(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$ характеризує трьох-хвильові взаємодії

$$f(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)=\tfrac{1}{2}\left\{\left[-\omega_1^2-(\omega-\omega_1)^2\right](1+\rho)+\right.$$
$$\left.+\left[\omega_1(\omega-\omega_1)\left(<\mathbf{k}_1,\mathbf{k}-\mathbf{k}_1>-1\right)-\omega\omega_1<\mathbf{k},\mathbf{k}_1>-\omega(\omega-\omega_1)<\mathbf{k},\mathbf{k}-\mathbf{k}_1>\right](1+\rho)\right\},$$

а $<\mathbf{k},\mathbf{k}_1>=(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)/(kk_1)$ - кут між векторами $\mathbf{k},\mathbf{k}_1$.

Нескладно бачити, що у лінійному наближенні отримане динамічне рівняння (24) вироджується у дисперсійне рівняння для відповідної гідродинамічної системи.

З іншого боку, якщо розглянути випадок відсутності верхньої рідини ($\rho=0$), то можна прийти до відповідного динамічного рівняння, яке описує вітрові поверхневі хвилі [7], що підтверджує достовірність отриманих результатів.

Висновки. Розглянуто задачу про випадкові внутрішні хвилі на поверхні контакту двох рідких півпросторів. Отримано систему рівнянь до другого порядку малого параметру відносно стохастичних амплітуд, на основі якої виведено друге наближення основного динамічного рівняння названої системи. Наведено порівняння з раніше отриманими результатами для невипадкових внутрішніх хвиль та для поверхневих вітрових хвиль.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Монин А.С., Яглом А.Я. Статистическая гидромеханика. Ч.1.- Москва: Наука, 1967.- 630 с.
2. Полников В.Г. Нелинейная теория случайного поля волн на воде.- Москва: ЛЕНАНД, 2007.- 408 с.
3. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околокритических волновых числах // Динамические системы.- 2001.- Вып. 17.- С.58-67.
4. Chen Xiao-Gang, Song Jin-Bao Second-order random wave solutions for interfacial internal waves in N-layer density-stratified fluid // Chinese Phys., 15.- 2006.- 756-766
5. Chi-Min Liu Parametric Study on Random Internal Waves in a Two-Fluid System // Underwater Technology and Workshop on Scientific Use of Submarine Cables and Related Technologies, 2007. Symposium on.- Pp. 83-86
6. Longuet-Higgins M.S. The effect of non-linearities on statistical distributions in the theory of sea waves // Journal of Fluid Mechanics.- Vol. 17, N 3.- 1963.- Pp. 459-480.
7. Masuda A., Kuo Y., Mitsuyasu H. On the dispersion relation of random gravity waves. Pt.1 // J.Fluid Mechanics.- 1979.- 92, N 4.- Pp.717-730
8. Nayfeh A.H. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME., Ser. E.- 1976.- 43, N4.- P. 584-588.
9. Srokosz, M. A. On the joint distribution of elevation and slopes for a nonlinear random sear, with an application to radar altimetry.- J. Geophys. Res., 91(C1).- 1986.- Pp.995–1006.